УДК 336.744:519.86

https://doi.org/10.68134/ah.2026-11-20.029

Касаджик Ілля Костянтинович
магістрант кафедри оптимального керування та економічної кібернетики, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
ORCID: 0009-0006-6935-0393

Науковий керівник: Васильєв О. Б., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри оптимального керування та економічної кібернетики, Одеський національний університет імені І. І. Мечникова

ВІДКЛАДЕНЕ ПЕРЕВІДКРИТТЯ ПОЗИЦІЇ КОНЦЕНТРОВАНОЇ ЛІКВІДНОСТІ ПІСЛЯ ПРОБОЮ МЕЖІ ДІАПАЗОНУ: РЕТРОСПЕКТИВНИЙ ТЕСТ НА ДАНИХ UNISWAP V3

Анотація. Постачальник ліквідності в протоколі Uniswap V3 після виходу ціни за межу діапазону зазвичай одразу перевідкриває позицію навколо нової ціни. Отримано точну формулу вартості позиції із симетричним у логарифмі ціни діапазоном і доведено, що в межах діапазону функція вартості строго зростає та логарифмічно увігнута. Звідси виведено потраєкторну тотожність: без урахування комісій і за зсуву ціни в межах півширини негайне перевідкриття програє відкладеному тоді й лише тоді, коли до моменту відкладеного входу ціна повертається, і в першому наближенні втрачає половину зворотного зсуву логарифма ціни. На хвилинних даних пулу USDC/WETH 0,05 % в мережі Ethereum за 05.05.2021–14.09.2026 для півширини 0,2 через годину після пробою ціна була зміщена назад у 60 випадках із 90, а 80 % пробоїв припали на хвилини із сигналом турбулентного стану прихованої марковської моделі. У ретроспективному тесті на всьому ряді відкладення входу до спаду волатильності, але не довше ніж на 60 хвилин, підвищує середньорічну дохідність із −29,0 % до −5,6 %, а виграш додатний у 91 зі 113 річних вікон. Більшу частину виграшу дає сама затримка, а пасивний широкий діапазон лишається кращим.

Ключові слова: концентрована ліквідність, Uniswap V3, перевідкриття позиції, функція вартості, логарифмічна увігнутість, прихована марковська модель, ретроспективний тест.

Abstract. A Uniswap V3 liquidity provider usually reopens a position around the new price as soon as the price leaves its range. For a range symmetric in log price, we derive the exact position value and prove that it is strictly increasing and log-concave within the range. This yields a pathwise identity: ignoring fees and for post-breakout moves within the half-width, immediate re-entry loses to deferred re-entry if and only if the price has reverted by then, and to first order it loses half of the reverse log-price move. On one-minute data from the USDC/WETH 0.05% pool on Ethereum (05.05.2021–14.09.2026), for a half-width of 0.2 the price had moved back one hour after the breakout in 60 of 90 cases, and 80% of breakouts fell on minutes with the turbulent-state signal of a hidden Markov model. In a full-sample backtest, deferring re-entry until volatility subsides, but for at most 60 minutes, raises the annualized return from −29.0% to −5.6%, with a gain in 91 of 113 one-year windows. Most of the gain comes from the delay itself, and a passive wide range remains better.

Keywords: concentrated liquidity, Uniswap V3, position re-entry, value function, log-concavity, hidden Markov model, backtest.

Вступ

У протоколі Uniswap V3 постачальник ліквідності отримує комісії, лише поки ціна всередині його діапазону [1]. Вузький діапазон дає більше комісій, але й більшу втрату відносно портфеля з безперервним перебалансуванням (loss-versus-rebalancing, LVR) [2]; у 17 великих пулах у 2021 р. непостійні втрати постачальників (260,1 млн USD) перевищили їхні комісії (199,3 млн USD) [3]. Режимні моделі волатильності [4; 5] мало допомагають вибрати

ширину діапазону, бо час релаксації режимного ланцюга (19 хв) значно менший за горизонт такого рішення [6], але можуть підказати, коли саме перевідкривати позицію.

Мета і завдання

Мета роботи: обґрунтувати правило відкладеного перевідкриття позиції з фіксованою шириною. Завдання: знайти точну функцію вартості позиції, аналітично порівняти негайне й відкладене перевідкриття та перевірити висновок на даних і ретроспективним тестом.

Методи

Нехай Pt – ціна ETH у USDC, Xt = ln Pt. Позиція з центром c і півшириною d містить ліквідність L на відрізку цін [ec−d, ec+d]; за формулами Uniswap V3 [1] при c − d ≤ X ≤ c + d вона складається з

Таблиця 1

	(1)

одиниць ETH і USDC відповідно; поза відрізком у позиції лишається один актив.

Твердження 1. Нехай u = X − c, q = e−d/2. Відношення вартості позиції V = eXx + y до її вартості в момент відкриття (u = 0) при −d ≤ u ≤ d дорівнює

Таблиця 2

	(2)

а поза відрізком φd(u) = (1 + ed/2)/2 при u > d і φd(u) = φd(−d) eu+d при u < −d.

Доведення. Із (1) V = Lec/2(2eu/2 − q − q eu), зокрема V0 = 2Lec/2(1 − q); друга рівність у (2) перевіряється зведенням до спільного знаменника. Поза відрізком x = 0 або y = 0, і вартість стала або пропорційна ціні. □

У (2) перший доданок є вартістю портфеля 50/50 без перебалансування, другий – втратою від концентрації (для d = 0,2 на межах u = d і u = −d це 5,81 % і 4,76 % початкової вартості).

Лема. На [−d, d] функція φd строго зростає й логарифмічно увігнута, φd(0) = 1, φ'd(0) = 1/2, φ'd(d) = 0; якщо d < ln 2, вона також строго увігнута.

Доведення. Диференціюючи (2), маємо

формула

Отже, φ'd > 0 при u < d, а φ"d < 0 при u > d − 2 ln 2, тобто на всьому відрізку, якщо d < ln 2. Крім того,

формула

бо 1 − 2q eu/2 + eu > (1 − eu/2)2 ≥ 0; тому (ln φd)" < 0. □

Нехай у момент τ ціна вийшла з діапазону з центром c у напрямку ξ ∈ {−1, 1}, вийшовши за межу на ε = ξ(Xτ − c) − d ≥ 0, і Zt = ξ(Xt − Xτ) – зсув після пробою (Zt < 0 означає повернення ціни). Стратегія I одразу відкриває позицію з центром Xτ. Стратегія D залишає стару позицію відкритою до моменту зупинки σ ≥ τ і лише тоді відкриває нову з центром Xσ.

Твердження 2. Нехай −d ≤ Zt ≤ d на [τ, σ]. Без урахування комісій, газу й витрат на обмін капітали стратегій у момент σ задовольняють тотожність

Таблиця 3

	(3)

де функція Rd(z), задана правою частиною (3) із заміною Zσ на z за фіксованого ε, строго зростає на [−d, d], Rd(0) = 1 і Rd(z) = 1 + z/2 + O(z2) при z → 0. Отже, знак WI(σ) − WD(σ) збігається зі знаком Zσ, а при Zσ ≥ 0 і d < ln 2 відносний виграш негайного входу Rd(Zσ) − 1 не перевищує Zσ/2.

Доведення. Вимірюємо капітал в одиницях активу, який D тримає після пробою (USDC при ξ = 1, ETH при ξ = −1); відношення капіталів від цього не залежить. При ξ = 1 за твердженням 1

формула

причому WI(τ) = WD(τ) і φd(v) = φd(d) при v ≥ d; випадок ξ = −1 зводиться до цього тотожністю φd(u) e−u = φd(−u). При z ≥ −ε маємо Rd(z) = φd(z), що зростає за лемою; при z < −ε похідна ln Rd дорівнює (ln φd)'(z) − (ln φd)'(d + ε + z) > 0, бо (ln φd)' строго спадає на [−d, d], а z < d + ε + z < d. Розклад випливає з φ'd(0) = 1/2 і φ'd(d) = 0, а оцінка – з увігнутості: φd(z) ≤ 1 + z/2. □

Наслідок. Тотожність (3) не залежить від моделі ціни. Усереднення дає E[1 − Rd(Zσ)] = −E Zσ/2 + O(E Zσ2): з точністю до членів другого порядку відкладення вигідне, якщо після пробою ціна в середньому повертається (E Zσ < 0). Наприклад, для d = 0,2 і ε = 0 зсув Zσ = −0,05 дає Rd − 1 = −2,43 %, а Zσ = 0,05 дає +2,23 %.

Правило перевідкриття задається моментом зупинки

Таблиця 4

	(4)

де T = 60 хв, st ∈ {0, 1} – сигнал високої волатильності, обчислений лише за даними до хвилини t включно; негайному входу відповідає σ = τ. Основний сигнал st = 1{πt(3) > η}, η = 0,3, де πt(j) – апостеріорна ймовірність стану j трирежимної прихованої марковської моделі (HMM; стани впорядковано за зростанням дисперсії, стан 3 турбулентний) з причинним фільтром

Таблиця 5

	(5)

де rt = Xt − Xt−1, aij – перехідні ймовірності, gj(0) = pj, gj(r) = (1 − pj) N(r; μj, wj) при r ≠ 0, де N – нормальна щільність із середнім μj і дисперсією wj; параметри оцінено онлайновим EM-алгоритмом [5] із кроком (t + 20)−0,8. Контрольні сигнали: st ∈ 1 з T = 5, 20 або 60 хв (фіксована затримка); випадковий сигнал; детектор рівня st = 1{vt > θ} з експоненційно зваженою оцінкою дисперсії

Таблиця 6

	(6)

і півперіодом h = 10, 60 або 360 хв; детектор сплеску st = 1{rt2 > θ'vt} з h = 60 хв, що діє одну хвилину; запізнення сигналу фільтра на 1 і 2 хв. Пороги θ, θ' і частку випадкового сигналу підібрано так, щоб сигнальних хвилин було 6,1 %, як в основного сигналу; пороги визначено за всім рядом.

Дані: обміни пулу USDC/WETH 0,05 % в мережі Ethereum із 05.05.2021 до 14.09.2026 (2 818 340 хвилинних приростів rt). Рушій ретроспективного тесту обчислює вартість позиції за (1), комісію за хвилину як γLQt/Λt (γ = 0,05 %, Qt – обсяг обмінів, Λt – активна ліквідність пулу), газ 5 USD і комісію обміну без цінового впливу; капітал 1 млн USD; d = 0,2 відповідає цінам від −18 % до +22 % відносно ціни входу, пасивний діапазон має d = 3,0. Середньорічну

дохідність обчислено на всьому ряді, на періодах 2021–2023 і 2024–2026 рр. та на 113 ковзних річних вікнах із кроком 14 діб.

Результати та обговорення

Для d = 0,2 правило негайного перевідкриття дає 90 пробоїв. Права частина (3) збігається з відношенням капіталів, обчисленим прямо за (1), з точністю 3·10−15, а умова −d ≤ Zt ≤ d протягом години порушилася лише в 2 пробоях. Пробої збігаються зі сплесками волатильності: 80 % із них сталися у хвилини з πt(3) > 0,3, хоча таких хвилин лише 6,1 %, а середня сума rt2 за годину після пробою в 34,6 раза більша за середню на всьому ряді. Після пробою ціна здебільшого повертається (табл. 1): через 60 хв Z < 0 у 60 випадках із 90, і негайний вхід у середньому програє 0,74 % капіталу (наближення −E Z/2 дає 0,67 %), тоді як комісії позиції I за цю годину в середньому становлять лише 0,06 %. Для d = 0,1 (294 пробої) середній зсув через 60 хв дорівнює −0,67 % (стандартна похибка 0,18 %), а середній програш негайного входу 0,43 %.

Таблиця 1

Зсув ціни після пробою й програш негайного входу без комісій для d = 0,2 (90 пробоїв; у дужках стандартна похибка)

Показник	5 хв	20 хв	60 хв
Середній зсув Z після пробою, %	−0,72 (0,37)	−0,96 (0,47)	−1,33 (0,48)
Частка пробоїв із Z < 0, %	56,7	63,3	66,7
Середнє Rd(Z) − 1 за (3), %	−0,41 (0,21)	−0,56 (0,25)	−0,74 (0,26)
Перший порядок: половина середнього зсуву, %	−0,36	−0,48	−0,67

Ретроспективний тест (табл. 2) враховує комісії, газ і подальші пробої. Для d = 0,2 відкладення за сигналом фільтра підвищує дохідність із −29,0 % до −5,6 % річних, а кількість перевідкриттів зменшується з 90 до 67 за середнього часу очікування близько 20 хв; для d = 0,1 дохідність зростає з −37,6 % до −22,9 %. На ковзних вікнах різниця «відкладене мінус негайне» для d = 0,2 у середньому становить 14,5 відсоткового пункту (в. п.; медіана 16,7) і додатна в 91 зі 113 вікон.

Більшу частину виграшу на всьому ряді й на вікнах дає сама затримка, що узгоджується з наслідком і табл. 1: фіксована затримка 60 хв дає −9,9 % замість −29,0 %, а на вікнах 10,0 із 14,5 в. п. Сигнал фільтра додає до неї 4,3 в. п. на всьому ряді й 4,5 в. п. на вікнах, але із запізненням на 1 хв перевага на вікнах зникає (0,7 в. п.). Детектор рівня (6) з h = 10 хв на всьому ряді не поступається фільтру (−5,2 % проти −5,6 %); детектор сплеску на всьому ряді (−17,9 %) не кращий за фіксовану затримку.

Таблиця 2

Середньорічна дохідність (%) позиції з півшириною d = 0,2 за різних правил перевідкриття

Правило перевідкриття	2021–2026	2021–2023	2024–2026
Негайне перевідкриття	−29,0	−39,0	+1,7
Випадковий сигнал	−29,0	−39,1	+4,6
Фіксована затримка 60 хв	−9,9	−19,2	+3,8
Детектор сплеску (сигнал 1 хв)	−17,9	−29,4	+3,9
Детектор рівня (EWMA, 10 хв)	−5,2	−11,4	+4,1
Фільтр HMM, запізнення 2 хв	−9,3	−17,9	+3,2

Правило перевідкриття	2021–2026	2021–2023	2024–2026
Фільтр HMM, запізнення 1 хв	−5,0	−12,6	+2,8
Фільтр HMM ($\pi t(3) > 0{,}3$)	−5,6	−12,8	+6,3
Пасивний широкий діапазон ($d = 3{,}0$)	+2,9	−0,9	+7,9

Результат має межі. Для $d \geq 0{,}35$ стійкого виграшу немає (для $d = 0{,}35$ на всьому ряді за відкладеного входу −6,5 % проти −1,3 % за негайного). У суцільному прогоні 2024–2026 рр. виграш нестійкий: для $d = 0{,}2$ фільтр із запізненням на 1 хв додає 1,1 в. п., випадковий сигнал 2,9 в. п. Дані охоплюють один пул, ціновий вплив не враховано; поріг 0,3, час 60 хв і півперіод 10 хв обрано з кількох варіантів на тих самих даних.

Висновки

1. Для позиції із симетричним у логарифмі ціни діапазоном отримано точну функцію вартості (2), доведено її строге зростання й логарифмічну увігнутість і виведено потраєкторну тотожність (3) для порівняння негайного й відкладеного перевідкриття.
2. На даних USDC/WETH після пробоїв вузьких діапазонів ціна в середньому повертається, тому відкладений вхід виграє: для $d = 0{,}2$ дохідність на всьому ряді зростає з −29,0 % до −5,6 % річних, а виграш додатний у 91 зі 113 річних вікон.
3. Практичне правило: після пробою чекати до години, доки оцінка дисперсії (6) з $h =$ 10 хв не опуститься нижче порога (у тесті його визначено за всім рядом). Пасивний широкий діапазон лишається кращим. Подальші дослідження: перевірка на інших пулах, урахування цінового впливу, вибір σ як задача оптимальної зупинки.

Інструмент штучного інтелекту Claude (Anthropic) використано для допомоги з програмним кодом, формулами й редагуванням тексту; за зміст, обчислення та висновки відповідає автор.

Список використаних джерел

1. Adams H., Zinsmeister N., Salem M., Keefer R., Robinson D. Uniswap v3 Core. 2021. URL: https://uniswap.org/whitepaper-v3.pdf (дата звернення: 19.11.2026)
2. Milionis J., Moallemi C. C., Roughgarden T., Zhang A. L. Automated Market Making and Loss-Versus-Rebalancing. arXiv. 2022. DOI: 10.48550/arXiv.2208.06046.
3. Loesch S., Hindman N., Richardson M. B., Welch N. Impermanent Loss in Uniswap v3. arXiv. 2021. DOI: 10.48550/arXiv.2111.09192.
4. Hamilton J. D. A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica. 1989. Vol. 57, No. 2. P. 357–384. DOI: 10.2307/1912559
5. Cappé O. Online EM Algorithm for Hidden Markov Models. Journal of Computational and Graphical Statistics. 2011. Vol. 20, No. 3. P. 728–749. DOI: 10.1198/jcgs.2011.09109
6. Kasadzhyk I., Vasyliev O. Relaxation time versus decision horizon: the value of regime information in concentrated liquidity range selection. Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки (ПІКТ-2026) : праці XV Міжнар. наук.-практ. конф., м. Чернівці, 12–14 листоп. 2026 р. 2026. P. 60–62.